MA2 – „písemná" přednáška 6. 4. 2020

I. Nejprve si ještě trochu rozšíříme „matematický slovník" o několik pojmů, které se týkají vlastností bodů a množin v R^n. Tyto pojmy nám pak umožní lépe (stručněji a výstižněji) vyjádřit a popsat vlastnosti funkcí $f: M \subset R^n \to R^m$, jejichž vyšetřováním se teď zabýváme.

Připomeneme si, co jsme již definovali: $(M \subset R^n)$

1) hromadný (limitní) bod množiny M:

bod X_0 je hromadný bod množiny M, když platí:

$\forall P(X_0): P(X_0) \cap M \neq \emptyset$ – tj. k bodu X_0 se můžeme z M přiblížit libovolně blízko a je tedy možné uvažovat limitu

$\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f(X)$ (limita fce f v bodě X_0 vzhledem k množině M) (a spojitost v X_0, když $X_0 \in M$, vzhledem k M)

Také – existuje posloupnost bodů $\{X_n\}$, $X_n \in M$ a $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X$

A množinu všech hromadných bodů množiny M jsme značili M'

2) vnitřní bod množiny M:

bod $X_0 \in M$ je vnitřní bod M, když existuje okolí $U(X_0)$ bodu X_0 takové, že $U(X_0) \subset M$.

(i) vnitřní body jsou také hromadné body;

(ii) vyšetřovali jsme spojitost v X_0 („bez" vzhledem k M);

(iii) parciální derivace a diferencovatelnost funkce byly definovány „jen" ve vnitřních bodech

A teď „navíc":

M^0 budeme značit množinu všech vnitřních bodů množiny M,
M^0 – vnitřek množiny M

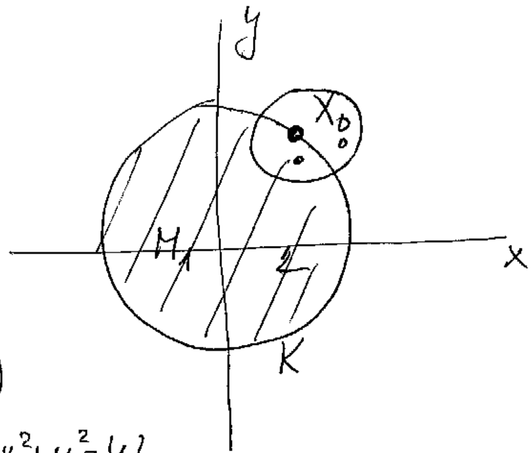
3) Mezi body, které nejsou vnitřní body množiny M, jsou ještě důležité t.zv. hraniční body množiny M:

$(\emptyset \neq) M \subset R^n$ – bod $A \in R^n$ je hraniční bod M, když platí:

$$\forall U(A): \quad U(A) \cap M \neq \emptyset \quad \text{i} \quad U(A) \cap (R^n \setminus M) \neq \emptyset$$

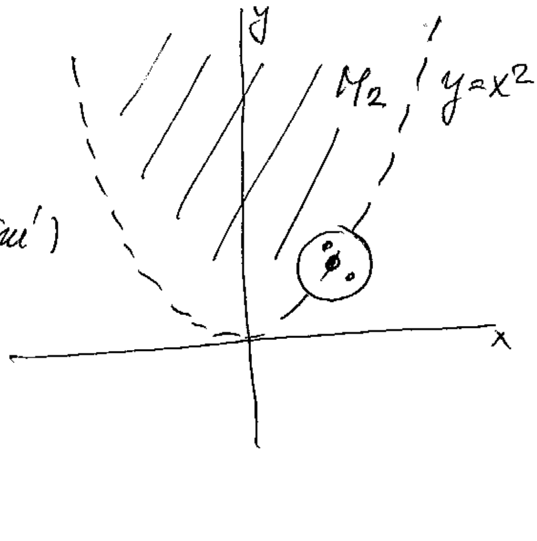
tj. v každém okolí bodu A leží bod z M i z doplňku k M.
Množina všech hraničních bodů M se nazývá hranice M a značí ∂M.

Příklad:



(i) $M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4\}$
(kruh o středu v $[0,0]$ a poloměru $r=2$, včetně kružnice o rovnici $x^2+y^2=4$)

lib. bod kružnice $K = \{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$ je hraniční bod M_1 (a také hromadný bod),
tj. $\partial M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$
a $M_1^0 = \{[x,y];\ x^2+y^2<4\}$



(ii) $M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y-x^2>0\}$
$M_2 = M_2^0$ (každý bod M^0 je vnitřní)
$\partial M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y-x^2=0\}$
(tj. $y=x^2$)

Další důležité „druhy" množin v R^n

4) $M \subset R^n$ je otevřená množina, když $M = M^0$,
tj. každý bod množiny M je bod vnitřní.

Příklad: (i) $M_2 = M_2^0$ (z minulého příkladu), tj. M_2 je množina otevřená

(ii) $M_3 = R^2 \setminus \{[0,0]\}$ je též množina otevřená

5) $M \subset R^n$ je množina uzavřená, když $M' \subset M$,
tj. všechny hromadné body množiny M jsou v M (tedy limity všech posloupností bodů z M zůstávají v M – M je „uzavřená" vzhledem k „limitění")

Ekvivalentně: (i) $M \subset R^n$ je uzavřená $\Leftrightarrow \partial M \subset M$

(je-li $X \in \partial M$, pak buď $X \in M$ a je izolovaný bod M (tj. existuje $\mathcal{O}(X)$: $\mathcal{O}(X) \cap M \neq \phi$) nebo je hromadným bodem M)

(ii) $M \subset R^n$ je uzavřená $\Leftrightarrow R^n \setminus M$ je množina otevřená

Označení: $M \cup \partial M = \overline{M}$ – uzávěr množiny M

také $\overline{M} = M \cup M'$, a platí: M je uzavřená $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

Z příkladů: M_1 je množina uzavřená, M_2 je množina otevřená
a $\overline{M_2} = \{[x,y] \in R^2;\ y - x^2 \geqq 0\}$
$\overline{M_3} = R^2$ ([0,0] je hromadný bod M_3)

! analogie z R : (a,b) - množina otevřená - „otevřený" interval
$\langle a,b\rangle$ - množina uzavřená - „uzavřený" interval

6) Omezená množina $M \subset R^n$:

$M \subset R^n$ je množina omezená, existuje-li $c > 0$ takové, že
$M \subset \mathcal{U}(0;c)$ (tj. $\rho_n(X,0) < c$ pro $\forall X \in M$)

7) Kompaktní množina $M \subset R^n$ - (velmi „důležitý" typ množiny):
$M \subset R^n$ je kompaktní, když M je omezená a uzavřená.

8) Souvislá množina $M \subset R^n$
a) $M \subset R^n$ je souvislá, když lib. dva body $A, B \in M$ lze „spojit" křivkou v M (zatím si představte intuitivně v $R^2 (R^3)$) tj. existuje křivka, jejíž počáteční bod je A, koncový bod B, a křivka „celá" leží v M)

b) Je-li M množina souvislá a otevřená - M - oblast v R^n

Naše příklady množin:

$M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4\}$ - omezená, uzavřená množina, tedy kompaktní

$M_1^0 = \{[x,y];\ x^2+y^2 < 4\}$ - otevřená a souvislá - oblast

$M_2 = \{[x,y];\ y - x^2 > 0\}$ - otevřená, souvislá - oblast

$M_4 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \geqq 4\}$ - uzavřená, ale není omezená

$\partial M_4 = \partial M_3 = \{[x,y];\ x^2+y^2 = 4\}$

a pozor! R^n a $\emptyset$ jsou otevřené i uzavřené (jediné mají obě tyto vlastnosti)

A ještě důležité vlastnosti funkcí spojitých na množině:

Definice: $f: D_f \subset R^n \to R$

a) funkce f je omezená na $M \subset D_f$, když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq c$;
f je na M omezená shora (resp. zdola), existuje-li $c \in R$ (resp. $d \in R$) tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leqq c$ (resp. $f(x) \geqq d$).

b) f je spojitá na $M \subset D_f$, když je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M (tj. ve vnitřních bodech je f spojitá, v hraničních bodech, pokud jsou to body M, spojitá „z M")

A důležité vlastnosti spojitých funkcí:

Věta: Je-li $M \subset R^n$ kompaktní (tj. omezená a uzavřená) a f je spojitá na M, pak f je na M omezená a nabývá na M globálního maxima i minima.

Definice globálních extrémů funkce na M (je „stejná" jako u funkce proměnné jedné): $f: M \subset R^n \to R$:

- f má v bodě $X_M \in M$ globální maximum na M, když platí:
$$\forall x \in M \ (M \subset R^n) \text{ je } f(x) \leqq f(X_M);$$
- f má v bodě $X_m \in M$ globální minimum na M, když platí:
$$\forall x \in M \text{ je } f(x) \geqq f(X_m).$$

<u>Věta (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)</u>

Je-li f spojitá v oblasti $M \subset R^n$, pak pro libovolné body $a, b \in M$ takové, že $f(a) < f(b)$ (BÚNO) a pro lib. c, $f(a) < c < f(b)$, existuje bod $x_c \in M$ tak, že $f(x_c) = c$.

<u>Poznámka:</u> Už jsme viděli, že tato vlastnost se velmi hodila při vyšetřování znaménka spojité funkce, např. znaménka derivace při vyšetřování průběhu funkce, nebo při „odstraňování" absolutní hodnoty v $|y(x) - c|$ při řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.

II. „<u>Implicitní funkce</u>" – zkrácený název pro <u>Funkce definované implicitně</u>

„<u>Úvod:</u>" Dosud pro nás funkce f – tj. zobrazení $f: Df \subset R \to R$, pak obecněji $f: Df \subset R^n \to R^m$ takové, že každému $x \in Df$ je přiřazeno jediné $y \in R^m (R)$ – bylo dáno „předpisem", např.

„vzorcem": $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nebo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

nebo vlastnostmi – např. $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$,

nebo pomocí nekonečné řady:

$$e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Funkce, zadané „předpisem" $y = f(x)$, $x \in \mathcal{D}f$, se nazývají
<u>funkce, zadané „explicitně"</u> (také často funkce explicitní)

Ale funkce, jakožto vztah mezi proměnnou x a hodnotou funkce y, může být zadána i jinak, než vzorcem – připomeňme si diferenciální rovnice 1. řádu se separovatelnými proměnnými, které jsme řešili separací:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$
, kde funkce f je spojitá v (a,b), funkce g je spojitá v (c,d), a nechť $g(y) \neq 0$ v (c,d);

pak $$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$
, $x \in (a,b)$, a je-li $F(x)$ primitivní fce k f v (a,b), $G(y)$ primitivní fce k g v (c,d);

pak $$G(y(x)) = F(x) + C$$
, a je-li dána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, je $C = G(y_0) - F(x_0)$

a řešení $y(x)$ je dáno rovnicí
$$\underline{G(y(x)) - F(x) - (G(y_0) - F(x_0)) = 0 \quad , \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)}$$

Nejjednodušší případ takové „situace" je zadání funkce jedné proměnné „tímto způsobem", tedy rovnicí

$$(*) \qquad \underline{F(x,y) = 0} \; .$$

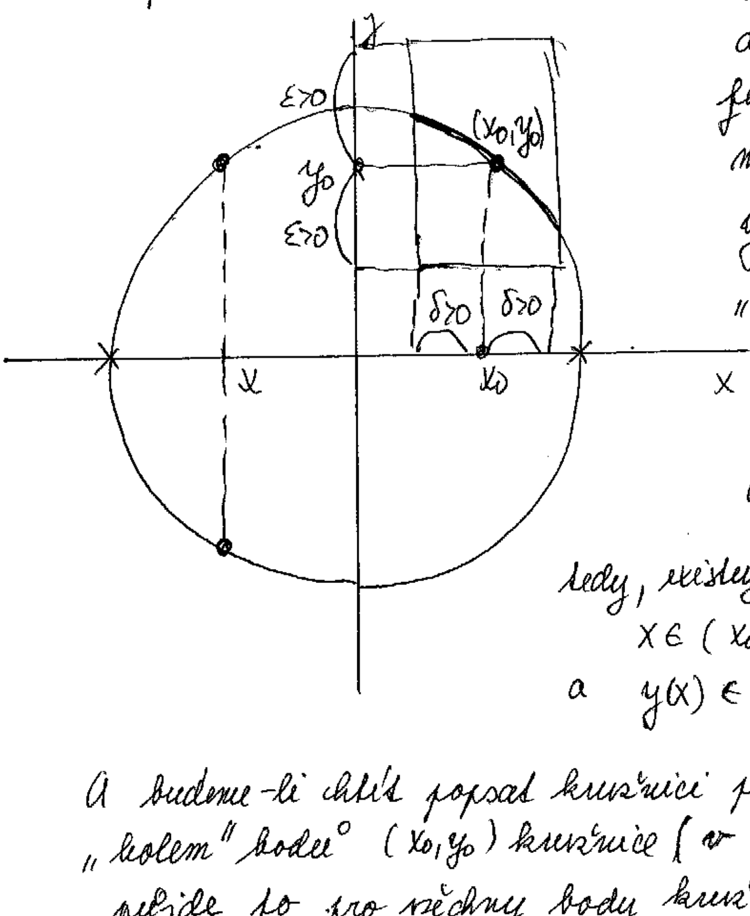
Budeme uvažovat rovnice (*) nelineární (z lineární rovnice $ax + by + c = 0$, pokud $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$, lze vždy jednu neznámou určit jako explicitní funkci druhé neznámé.

Pokud má rovnice

$$(*) \quad F(x,y) = 0$$

vůbec nějaké řešení (třeba rovnice $x^2+y^2+1=0$ v R^2 řešení nemá), pak nemůžeme obecně z jedné rovnice určit jen jednu neznámou, v závislosti na volbě té neznámé druhé. Zvolíme-li zde x, pak otázka, zda druhá neznámá, zde y, bude funkcí „proměnné" x, je vlastně otázka, zda zde ke zvolenému x existuje jediné y tak, aby $F(x,y)=0$, tj. zda $y=f(x)$ tak, že platí $F(x,f(x))=0$.

<u>Vezměme příklad:</u> $F(x,y) = x^2+y^2-r^2$, $r>0$; tedy zde by byla otázka, zda je rovnicí $x^2+y^2-r^2=0$ definována funkce. Ale rovnice $F(x,y)=0$ je pro $r>0$ rovnice kružnice,



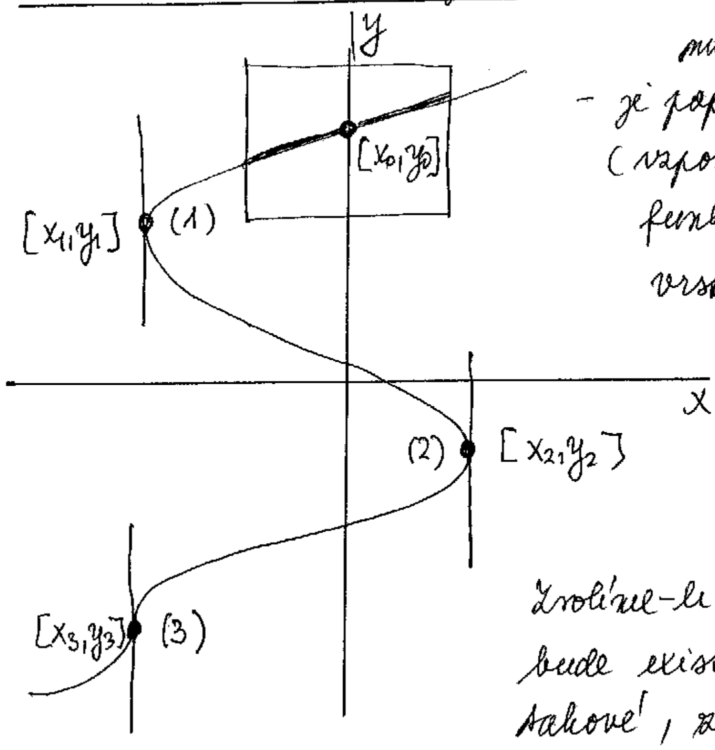
a kružnice není grafem žádné funkce; pokud zvolíme $x\in(-r,r)$, má rovnice $x^2+y^2=r^2$ dvě řešení: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, ale vezmeme-li „okénko" kolem bodu (x_0,y_0) kružnice $(y_0>0)$ – viz obrázek – pak část kružnice, která je v tom okénku, už grafem funkce <u>je</u>,

tedy, existuje $\delta>0$ tak, že $y(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ a $y(x)\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

A budeme-li chtít popsat kružnici pomocí grafů funkce $y=f(x)$ „kolem" bodů (x_0,y_0) kružnice (v okénku, tj. po „kouscích"), půjde to pro všechny body kružnice kromě průsečíků s osou x, tj. kromě bodů $[-r,0]$ a $[r,0]$. V jejich libovolném okolí (tj. v každém malém okénku kolem těchto bodů) má rovnice $x^2+y^2-r^2=0$ pro zvolené x vždy dvě řešení.

Jak toto charakterizovat, jakou vlastnost funkce $F(x,y)$ v rovnici $F(x,y)=0$?

Vezměme si „obecnější" obrázek:



množina bodů „na obrázku" – křivka – je popsána rovnicí $F(x,y)=0$ (vzpomeňte na „vrstevnice" grafu funkce $z=F(x,y)$ – zde je to vrstevnice pro $z=0$);

tj. naše „křivka" je množina $\{(x,y)\in R^2;\ F(x,y)=0\}$

Zvolíme-li bod $[x_0,y_0]$ (viz obrázek), opět bude existovat „okénko" o středu $[x_0,y_0]$ takové, že v tomto okénku bude „část" té naší křivky grafem funkce proměnné x, ale nepůjde udělat žádné okénko kolem bodů (1) a (2) obrázku, opět, v lib. malém okénku pro zvolené x („blízko" x_1, resp. x_2) budou existovat vždy dvě řešení y rovnice $F(x,y)=0$.

A je „vidět", že to jsou takové body křivky, kde existující tečna ke křivce je rovnoběžná s osou y (body (1) a (2)). Takové body jsou tedy „nebezpečné" (pro řešení našeho problému), nicméně může se stát, že (případ bodu (3)) i v okolí takového bodu křivka grafem funkce $y=f(x)$ bude.

A jak takové body s tečnou rovnoběžnou s osou y charakterizovat pomocí vlastností funkce $F(x,y)$?

Předpokládejme, že $F(x,y) \in C^1(G)$, $G \subset R^2$ je oblast; pak, je-li $F(x_0,y_0)=0$, je bod $[x_0,y_0,0]$ bodem grafu fce $F(x,y)$ a umíme zde najít rovnici tečné roviny ke grafu F v tomto bodě – $F(x,y)$ je diferencovatelná funkce (má spojité derivace) a tedy ke grafu existuje tečná rovina v bodech $[x,y,f(x,y)]$, $(x,y) \in G$; rovnice tečné roviny v $[x_0,y_0,0]$ je

$$\tau: \quad z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (F(x_0,y_0)=0),$$

a nechť $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$; pak pro $z=0$ dostaneme rovnici přímky (stopy roviny τ)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

tj. tečny ke křivce $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0). Má-li být tato tečna rovnoběžná s osou y, musí být $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$;

Tedy, řečeno řečí „obrázku" (přesná formulace bude za chvilku), aby křivka byla v obrázku „kolem" bodu (x_0,y_0) křivky grafem funkce $y=f(x)$ takové, že $f(x_0)=y_0$, asi stačí, aby $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. (tato není ale podmínka nutná – viz bod (3) na našem obrázku).

Funkci, která je definována rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0), tj. $y=f(x)$, $f(x_0)=y_0$, a $F(x,f(x))=0$, se říká funkce definovaná implicitně (nebo funkce zadaná implicitně) – krátce „implicitní funkce".

A teď přesná definice a věta o existenci funkce, definované implicitně:

Definice: Nechť

(1) $F(x,y)$ je funkce definovaná v otevřené množině $G \subset R^2$

(2) existuje bod $(x_0,y_0) \in G$ tak, že $F(x_0,y_0)=0$.

Říkáme, že rovnice $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$, jestliže existují $\varepsilon>0, \delta>0$ tak, že pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $y=f(x)$ jediné řešení rovnice $F(x,y)=0$ takové, že $f(x) \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$.

Věta („o implicitní funkci"): Nechť

1) $F(x,y) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^2$ je otevřená množina, $k \in N$;

2) $F(x_0,y_0)=0$, $(x_0,y_0) \in G$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Potom rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$, $f \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$, tedy

(1) $F(x, f(x))=0$ v $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$

(2) $f(x_0)=y_0$

Poznámka 1. „musí" platit bod (2) nebo, tj. $f(x_0)=y_0$ díky tomu, že ex. $\delta>0$ tak, že v $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $y=f(x)$ jediné řešení $F(x,y)=0$ pro $y\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ – – ale jedno řešení je v předpokladech – bod (x_0,y_0), tedy, $f(x_0)=y_0$!

Poznámka 2. Pokud $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ ale $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, tak můžeme „vyměnit" role $x \leftrightarrow y$ a pak bude rovnicí $F(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitní fce $x=g(y)$.

U kružnice: $F(x,y)=x^2+y^2-r^2$, $r>0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x$$

v bodě $[r,0]$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(r,0)=0$, ale $\frac{\partial F}{\partial x}(r,0)=2r\neq 0$!

tedy (a představte si na „obrázku") kružnici lze v okolí bodu $[r,0]$ (a stejně v okolí $[-r,0]$) vyjádřit jako fci proměnné „y":

$x=\sqrt{r^2-y^2}$ v okolí $[r,0]$ a

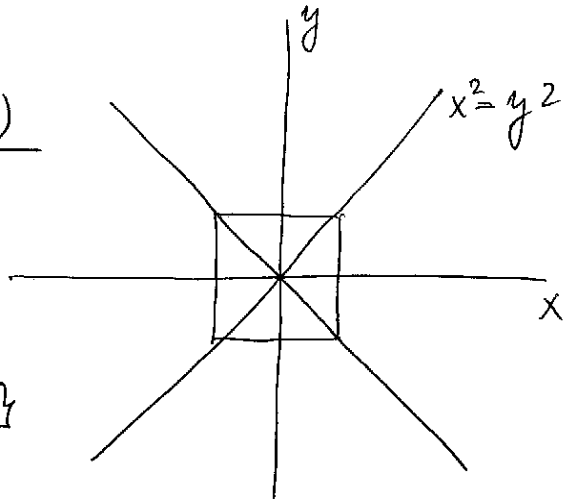
$x=-\sqrt{r^2-y^2}$ v okolí $[-r,0]$.

Ale jiný příklad:

1) $F(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0,y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

v žádném okolí bodu $(0,0)$ nelze množinu bodů $\{[x,y];\ F(x,y)=0\}$ „popsat" grafem funkce.



2) $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 2c^2(y^2-x^2)$, $c>0$; $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot 2x + 2c^2(-2x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2(x^2+y^2)2y + 2c^2\cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

Jak „vypadá" množina $\{(x,y);\ F(x,y)=0\}$

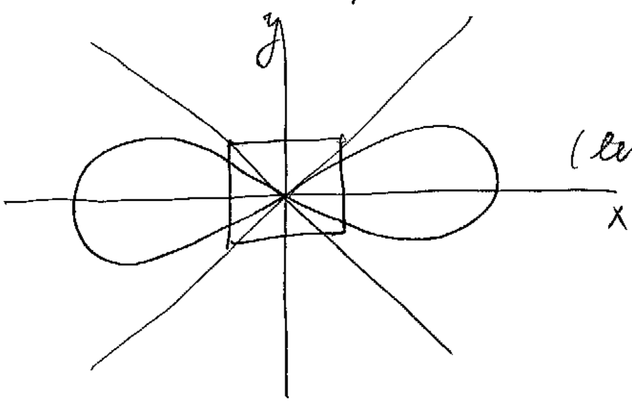
Vyjádříme $F(x,y)=0$ v polárních souřadnicích

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, \qquad x^2+y^2 = r^2 \quad (r>0,\ \varphi\in\langle 0, 2\pi\rangle)$$

Pak dostaneme: $r^4 + 2c^2r^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0$, $r \neq 0$

pak $r^2 - 2c^2\cos 2\varphi = 0$

$$0 < 2c^2\cos 2\varphi = r^2 \iff \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$



(lemniskata)

a maximální r je pro $\cos 2\varphi = 1$, tj. $2\varphi = 0 \vee 2\varphi = 2\pi$

tj. $\varphi = 0 \vee \varphi = \pi$

Ve větě o implicitní funkci se říká, že fce $f(x) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$, tedy, implicitně definovaná funkce má tolik derivací, spojitých v $\mathcal{U}(x_0)$, kolik má derivací (spojitých) funkce $F(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0) – jak ji spočítat?

Ještě dříve – zpravidla (když aplikačně věty o implicitní funkci) se užívá místo $y=f(x)$ pro implicitní funkci značení $y = y(x)$ (něco jako řešení rovnice diferenciální).

<u>Zkusme:</u> Je-li $y=y(x)$ funkce, definovaná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0), pak platí

$$(*) \qquad F(x,y(x)) = 0 \quad \text{v okolí } \mathcal{U}(x_0) \text{ a } y(x_0)=y_0 .$$

Jsou zde splněny předpoklady věty o derivaci složené funkce (řetízkového pravidla) a dostáváme derivací $(*)$:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,y(x))\right) = 0 \quad , \text{ tedy}$$

$$(**) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$$

a odtud:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} \quad \text{v } \mathcal{U}(x_0),$$

neboť, když $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ a $y=y(x)$ jsou spojité funkce, pak i $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$

<u>a tedy spec. pro bod $[x_0 y_0]$:</u>

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Má-li F spojité derivace druhého řádu v $\mathcal{U}(x_0, y_0)$, pak má spojitou druhou derivaci i funkce $y(x)$ v $\mathcal{U}(x_0)$ a lze tak dále derivovat „vztah" (**) – a dostaneme:

$$(***)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) + y''(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) +$$

$$+ \; y'(x) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot y'(x) \right) = 0 ,$$

a odtud opět lze určit $y''(x)$ v $\mathcal{U}(x_0)$, neboť „koeficient" u $y''(x_0)$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$ (opět);

a kdyby $F(x, y) \in C^{(3)}(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, lze opět derivovat (***) a kdyby „promyslete", jak bude vypadat derivace – tak opět „u y''' bude" $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$.

Derivace lze „spočítat" v bodě x_0 – protože zde víme, že $y(x_0) = y_0$, tj. umíme vyjádřit hodnoty derivací (dle návodu) $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ atd., tedy, tyto derivace nám umožní přibližné řešení dané, obecné nelineární rovnice, ve tvaru Taylorova polynomu o středu v bodě x_0.

<u>A příklad – na další stránce:</u>

(1) $\underline{x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0 \quad , (x_0, y_0) = (1,2)}$

tj. $F(x,y) \equiv x^3 + y^3 - 3xy - 3$

a platí (ověřujeme předpoklady věty o implicitní funkci)

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F(x,y) \in C^\infty(R^2) \\ 2) & F(1,2) = 0 \qquad (F(1,2) = 1+8-6-3) \\ 3) & \frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 3y^2 - 3x \Big|_{(1,2)} = 9 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (věta o impl. fci) v okolí bodu (1,2) je rovnicí (1) definována implicitní funkce $y = y(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(1))$, $y(1) = 2$

a platí (derivujeme $F(x, y(x)) = 0$)

$$x^3 + y^3(x) - 3xy(x)) - 3 = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$3x^2 + 3y^2(x) . y'(x) - 3y(x) - 3xy'(x) = 0$$

tj. $$y'(x)\,(y^2(x) - x) = -x^2 + y(x) \quad (*)$$

$$y'(x) = -\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x}$$

$$\underline{\text{a} \quad y'(1) = +\frac{1}{3}}$$

nebo užití vzorce pro $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \; ;$$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$

$$(**) \quad y'(x) = -\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x}, \quad x \in \mathcal{U}(1)$$

A chceme-li ještě určit $y''(1)$ (třeba pro Taylorův polynom), pak je lepší derivovat rovnici $(*)$ než vztah $(**)$:

$$\frac{d}{dx}(*):\quad y''(x)\left(y^2(x)-x\right)+y'(x)\left(2y(x)\cdot y'(x)-1\right)=-2x+y'(x)$$

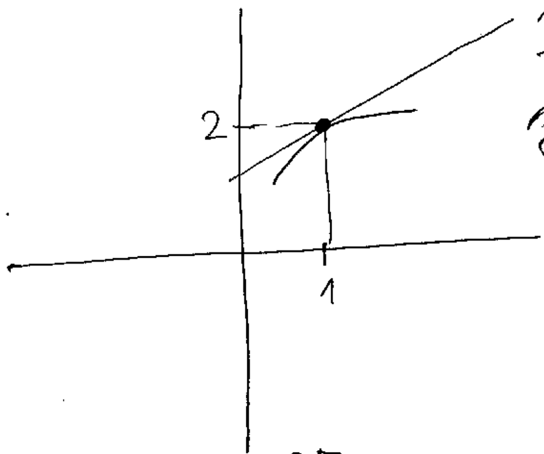
a pro $x=1$: $\quad y''(1)\cdot 3+\frac{1}{3}\left(2\cdot 2\cdot \frac{1}{3}-1\right)=-2+\frac{1}{3}$

a odtud $\quad y''(1)=-\frac{16}{27}$,

a máme "přibližné řešení" (Taylorův polynom 2. stupně)

$$\underline{y(x)\cong 2+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{8}{27}(x-1)^2 \quad v\ \mathcal{U}(1)}$$

a představa grafu $y(x)$:



tečna – směrnice $k=\frac{1}{3}$

$y''(1)<0 \Rightarrow y(x)\ \cap$ v okolí bodu $x_0=1$

<u>A jiná aplikace derivace</u> $y'(x_0)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$:

rovnice tečny ke grafu funkce $y=y(x)$ v bodě (x_0,y_0):

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0),\ \text{tj.}\quad y=y_0-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0) \quad (***)$$

tedy: $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$, tj.

$$\underline{\nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0 \equiv dF(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0)=0}$$

a odtud je opět „vidět", že, je-li $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$, pak vektory $\nabla F(x_0,y_0)$ a $(x-x_0, y-y_0)$ jsou navzájem kolmé, tedy gradient $\nabla F(x_0,y_0)$ funkce $F(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) je kolmý k tečně vrstevnice" $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) (body (x,y), (x_0,y_0) jsou body tečny k vrstevnici v (***)).

<u>a příklad:</u>

jak snadno „spočítáme" rovnici tečny ke kružnici o rovnici

$$\underline{x^2+y^2 = r^2,\ r>0}\ ;$$

zde: $F(x,y) = x^2+y^2-r^2$,

a nechť (x_0,y_0) je bod kružnice, tj. $F(x_0,y_0)=0$;

$\nabla F(x_0,y_0) = 2(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (počátek není bodem kružnice);

pak rovnice tečny k dané kružnici v bodě (x_0,y_0) je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0,$$

tedy $\quad 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 0$,

a po úpravě $\quad x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2$, tj. $(x_0^2+y_0^2=r^2)$

$$\underline{x_0x + y_0y = r^2}$$

<u>a ještě poznámka k odvození rovnice tečny v bodě (x_0,y_0) křivky o rovnici $F(x,y)=0$:</u>

analogicky dostaneme rovnici tečny, jako v případě, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ (viz minulá stránka), i v případě, že $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$; stačí tedy pro rovnici tečny v bodě (x_0,y_0) ke křivce $F(x,y)=0$ předpokládat, že $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (za splnění ostatních předpokladů věty o implicitní funkci.

<u>a příští přednáška bude zobecněním dnešní – vyšetřování implicitně definované funkce více proměnných.</u>